

偏心補正計算

<試験合格へのポイント>

偏心補正計算は、偏心補正計算の出題はその計算方法から、正弦定理を用いるものと余弦定理を用いるものに大別されるが、出題は正弦定理を用いる問題が主である。

正弦定理を用いる問題は、与えられた数値を単に公式に当てはめればよいから、比較的簡単に解答することができる。また、ほぼ 100% の確率で問題文に図が示してあるため、どの角度を求めるのか？ 偏心角がどこになるのか？ 等を問題の図を整理して考えれば、単純ミスを防ぐことができる。

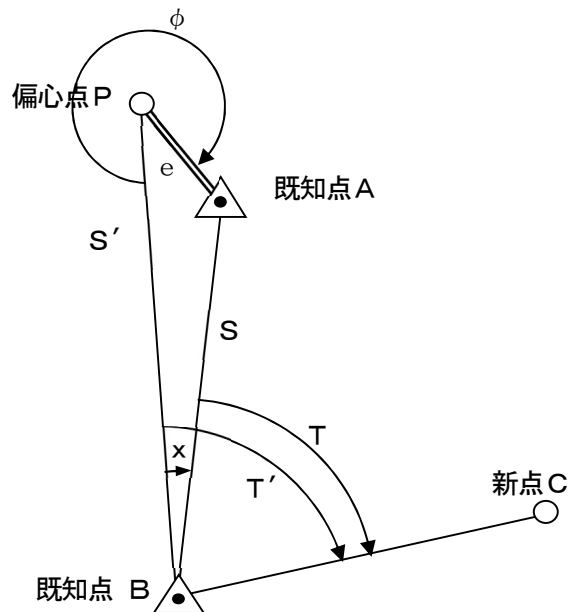
欲を言えば、正弦定理により偏心角を求める公式は、単に暗記するのではなく導き出せるようになる方が良い。

(★★★：最重要事項 ★★：重要事項 ★：知っておくと良い)

(1) 偏心補正計算とは

偏心補正計算とは、次図のように本来観測したい角度 (T) が、既知点 (A) を見通せないため、(P) 点に観測点を「偏心」させ、角度 (T') を観測した後、偏心要素である e (偏心距離)、 ϕ (偏心角)、 S (既知点 $A \sim B$ 間の距離)、または S' (既知点 $B \sim$ 偏心点 P の距離) を観測し、 x (偏心補正量) を求める計算により角度 (T) を求めようとする計算方法である。

水平角観測における**偏心補正計算の方法には、正弦定理と、余弦定理 (二辺夾角)** の2通りがある。これらの方法は、計算に使用する測点間の距離が偏心点に対してどのような位置にあるかによって、使い分ける必要がある。以下に各方法について解説する。



(2) 正弦定理による計算 ★★

正弦定理による計算は、「測点間距離が偏心点に対して、対向する辺」(前図の場合は偏心点Pに対向する辺Sになる。)である場合に用いられる。

例えば、前図の偏心補正量 x を求める場合、

$$\frac{e}{\sin x} = \frac{S}{\sin \alpha} \quad \text{より、} \quad (\text{正弦定理})$$

$$\sin x = \frac{e}{S} \sin \alpha \quad \text{ここで、} \alpha = 360^\circ - \phi$$

$$\text{よって、} x = \sin^{-1} \left(\frac{e}{S} \sin \alpha \right) \quad \text{となる。}$$

※上記が作業規程の準則にある式である。試験で用いる式は、上式を下記のように展開し、2項以降の微小項目を無視したもので十分である。

$$x = \sin^{-1} \left(\frac{e}{S} \sin \alpha \right) \quad \text{より、} \quad x = \left(\frac{e}{S} \sin \alpha \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{e}{S} \sin \alpha \right)^3 + \dots$$

また、上式より導かれる x の値はラジアン単位であるため、 ρ'' をかけて、度分秒に直すと、偏

心補正計算の基本式

$$x'' = \frac{e}{S} \rho'' \sin \alpha \quad \text{となる。}$$

ここで、測点間距離 S がわかっている場合は、正弦定理を用いて偏心補正の基本式により偏心角を求めることができる。

※作業規程の準則によれば、 $\frac{e}{S}$ または $\frac{e}{S'} < \frac{1}{450}$ の場合は、 $S = S'$ として計算してよい。

(3) 余弦定理による計算 ★

余弦定理による計算は、「測点間距離が偏心点に隣接する辺」(次図の場合は、偏心点Pに隣接する辺 S' となる。)である場合に用いられる。

ここで、前図を用いて考えると、測点間距離 S' がわかっている場合は、余弦定理により、偏心点の対向辺の距離と偏心角を求めることができる。

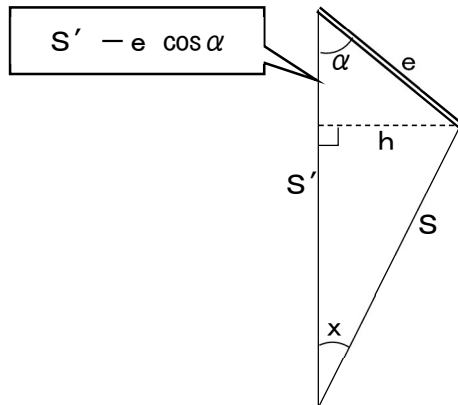
まず、偏心点に対抗する辺 S を求めると、

$$\text{余弦定理} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{より、}$$

※ここで、 $\alpha = 360^\circ - \phi$ となる。

$$S = \sqrt{S'^2 + e^2 - 2S'e \cos \alpha}$$

次に、偏心率 x を求めると、



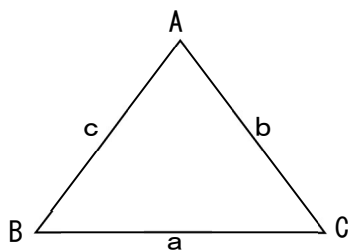
図より、 $\sin \alpha = \frac{h}{S}$ よって、 $h = e \sin \alpha$

$$\tan x = \frac{h}{S' - e \cos \alpha} = \frac{e \sin \alpha}{S' - e \cos \alpha} \quad \text{よって、}$$

$$x = \tan^{-1} \left(\frac{e \sin \alpha}{S' - e \cos \alpha} \right)$$

となる。

● 正弦定理



三角形ABCにおいて、それぞれの対辺の長さを a , b , c とすると、次の関係が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

※ R : 三角形の外接円の半径

● 余弦定理：第二法則

前出の三角形ABCにおいて、次の関係が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

◆ 過去問題にチャレンジ！ — 正弦定理を用いる問題 — (H26-6：士補)

図6のように、既知点Bにおいて、既知点Aを基準方向として新点C方向の水平角を測定しようとしたところ、既知点Bから既知点Aへの視通が確保できなかったため、既知点Aに偏心点Pを設けて、水平角 T' 、偏心距離 e 及び偏心角 ϕ の観測を行い、表6の結果を得た。既知点A方向と新点C方向の間の水平角 T は幾らか。最も近いものを次の中から選べ。

ただし、既知点A、B間の距離 S は、2,000mであり、 S 及び偏心距離 e は基準面上の距離に補正されているものとする。また、角度1ラジアンは、 $2'' \times 10^5$ とする。

なお、関数の数値が必要な場合は、巻末の関数表を使用すること。

1. $45^\circ 24' 00''$
2. $45^\circ 27' 00''$
3. $45^\circ 30' 00''$
4. $45^\circ 33' 00''$
5. $45^\circ 36' 00''$

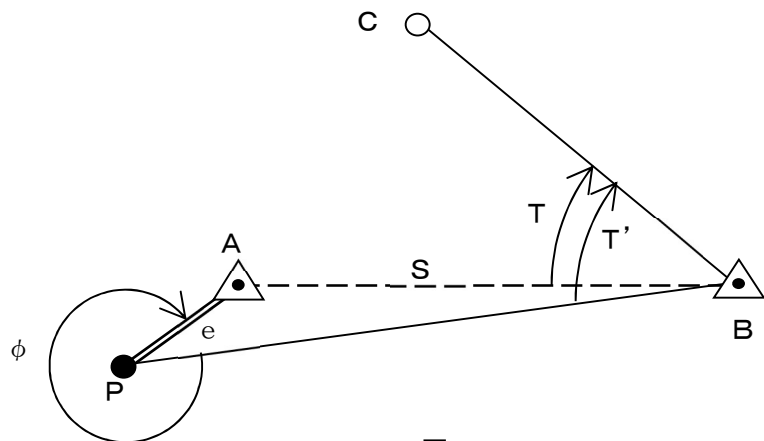


図6

表6

既知点A	$\phi = 330^\circ 00' 00''$
	$e = 4.80 \text{ m}$
既知点B	$T' = 45^\circ 37' 00''$

< 解 答 >

偏心補正計算（正弦定理）に関する問題である。次の手順で解答すればよい。

問題の図より、 $T = T' - \angle ABP$ となる。ここで、 $\angle ABP = \alpha$ とすると、 α は偏心計算により、次のように解く事ができる。

$$\alpha = \frac{e}{S} \rho \sin (360^\circ - \phi) = \frac{4.80\text{m}}{2,000\text{m}} \times 2 \times 10^5 \times \sin (360^\circ - 330^\circ) = 240'' = 4'$$

ここで、 $\sin 30^\circ = 0.5000$ とする。

よって、

$$T = 45^\circ 37' 00'' - 4' = 45^\circ 33' 00'' \quad \text{となる。}$$

解答： 4

◆ 過去問題にチャレンジ！ — 余弦定理を用いる問題 — (H22-8：士補)

トータルステーションを用いた基準点測量において、既知点Aと新点Bの距離を測定しようとしたが、既知点Aから新点Bへの視通が確保できなかったため、新点Bの偏心点Cを設け、図8に示す観測を行い、表8の観測結果を得た。点A、B間の基準面上の距離Sは幾らか。最も近いものを次の中から選べ。

ただし、 ϕ は偏心角、Tは零方向から既知点Aまでの水平角であり、点A、C間の距離 S' 及び偏心距離 e は基準面上の距離に補正されているものとする。

なお、関数の数値が必要な場合は、巻末の関数表を使用すること。

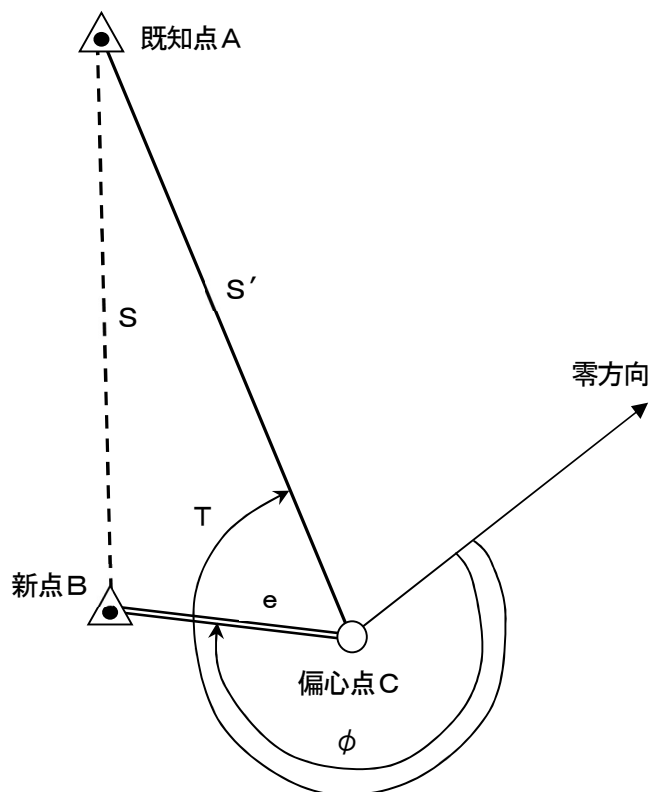


表8

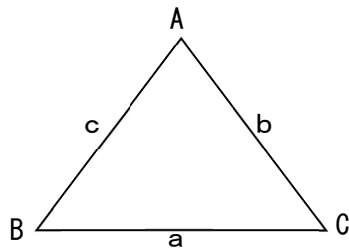
観測結果	
S'	900 m
e	100 m
T	314° 00' 00"
ϕ	254° 00' 00"

図8

1. 815 m
2. 834 m
3. 854 m
4. 880 m
5. 954 m

< 解 答 >

偏心補正計算（余弦定理）の計算問題である。二辺夾（きょう）角による計算とも呼ばれる。
次のように、余弦定理を用いて偏心点に対向する辺の長さを求めればよい。



余弦定理（第二法則）を以下に示す。

左の三角形ABCにおいて、次の関係が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

問題の図から、余弦定理を用いて式を組み立てると、次のようになる。

$$S^2 = S'^2 + e^2 - 2S'e \cdot \cos (T - \phi)$$

この式に数値を代入する。

$$S^2 = 900^2 + 100^2 - 2 \times 900 \times 100 \times \cos (314^\circ - 254^\circ)$$

$$S^2 = 730000 \quad \therefore S = 854.4\text{m}$$

よって、距離Sは、3の 854m となる。

解答：3

◆ 過去問題にチャレンジ！ — 正弦・余弦定理の両方を用いる問題 — (H21-No7：士補)

図7に示すように、既知点Aにおいて既知点Bを基準方向として新点C方向の水平角 T' を観測しようとしたところ、既知点Aから既知点Bへの視通が確保できなかったため、既知点Aに偏心点Pを設けて観測を行い、表7の観測結果を得た。既知点B方向と新点C方向の間の水平角 T' はいくらか。最も近いものを次の中から選べ。

ただし、既知点A、B間の基準面上の距離は、2,000.00mであり、 S' 及び偏心距離 e は基準面上の距離に補正されているものとする。

なお、 $\sin^{-1}(0.00059) \doteq 0.0338^\circ$ 、 $\sin^{-1}(0.00111) \doteq 0.0636^\circ$ 、 $\tan^{-1}(0.00111) \doteq 0.0636^\circ$ とすること。

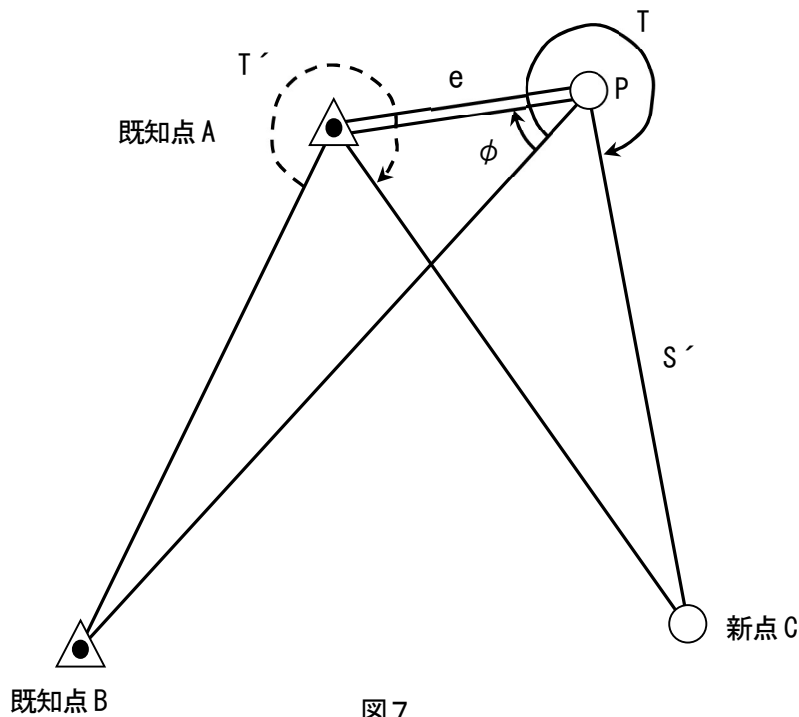


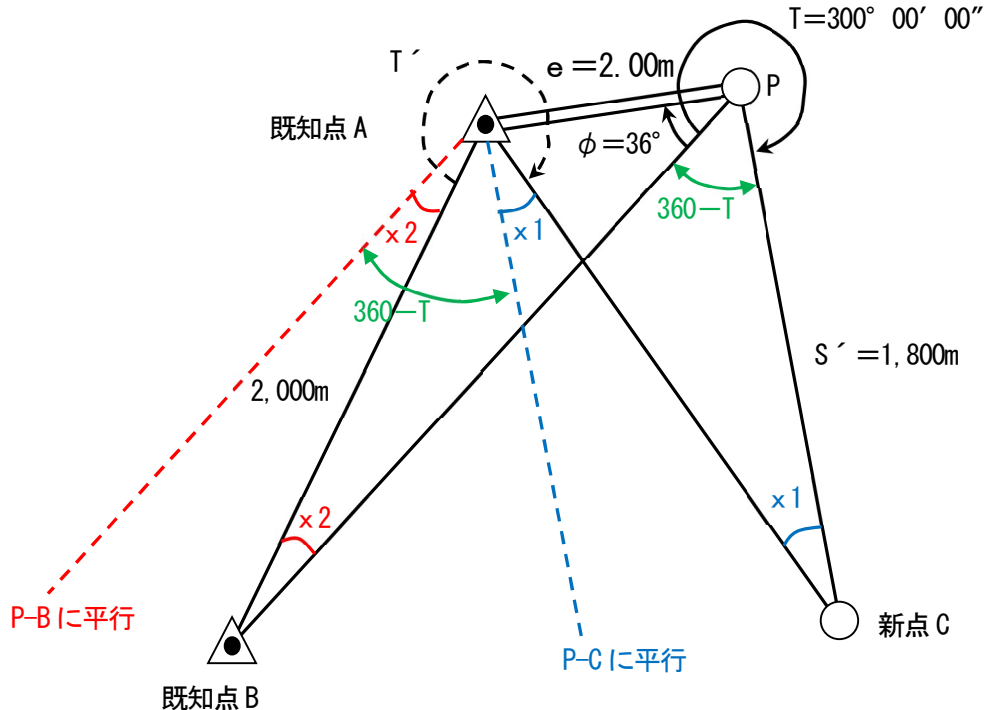
表7

観測結果	
S'	1,800.00 m
e	2.00 m
T	$300^\circ 00' 00''$
ϕ	$36^\circ 00' 00''$

1. $299^\circ 54' 09''$
2. $299^\circ 58' 13''$
3. $300^\circ 00' 00''$
4. $300^\circ 01' 47''$
5. $300^\circ 05' 51''$

< 解 答 >

問題文の図に次図のような補助線を引き、式を組立て、偏心補正計算を行えばよい。



図より、 $T' = 360^\circ - \{(360^\circ - T) - x_2 + x_1\}$ によって、求められる事が解る。そこで、偏心補正量 x_1 、 x_2 をそれぞれ求めると次のようになる。

< x_1 の計算 >

「測点間距離が偏心点に隣接する辺」であるため、余弦定理による式を用いて解く。

$$\tan x_1 = \frac{e \sin \alpha}{S' - e \cos \alpha} = \frac{2.00 \times \sin 96^\circ}{1,800 - 2.00 \times \cos 96^\circ} = 0.00111$$

$$x_1 = \tan^{-1} 0.00111 = 0.0636^\circ \quad (\text{問題文より})$$

※ここで、 $\sin 96^\circ$ 、 $\cos 96^\circ$ は $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$ として、関数表によりその値を求めればよい。
 ※また、正弦定理による偏心補正計算の公式に値を代入しても、 0.0633° と近い値にはなる。

< x_2 の計算 >

「測点間距離が偏心点に対して、対向する辺」であるため、正弦定理による式を用いて解く。

$$x_2 = \frac{e}{S'} \times \sin \alpha = \frac{2.00\text{m}}{2,000\text{m}} \times \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \times \sin 36^\circ = 0.0336776... = 0.03368^\circ$$

※一般的には、 ρ'' の値を用いるが今回は問題文中に指示されていなかったため、 $(180^\circ / \pi)$ を用いた。

ここで、正弦定理そのものを用いても解く事が出来る。正弦定理を用いると、次のようになる。

$$\frac{2}{\sin x_2} = \frac{2,000}{\sin 36^\circ} \quad \text{より、} \quad \sin x_1 = 0.00058778... = 0.00059$$

$$x_1 = \sin^{-1} 0.00059 = 0.0338^\circ \quad (\text{問題文より})$$

<水平角 T' の計算>

冒頭の式から、水平角 T' を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} T' &= 360^\circ - \{ (360^\circ - T) - x_2 + x_1 \} \\ &= 360^\circ - \{ (360^\circ - 300^\circ) - 0.0337^\circ + 0.0636^\circ \} = 360^\circ - 60.0299^\circ = 299.9701^\circ \\ &= 299^\circ 58' 12.4'' \end{aligned}$$

よって、最も近い選択肢は、2. の $299^\circ 58' 13''$ となる。

解答：2